УДК 517.982.274+517.938

А.В.БРАТИЩЕВ

ХАОТИЧНОСТЬ КОММУТИРУЮЩИХ С ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ ДАНКЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается оператор Данкла как частный случай оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда- Леонтьева. Средствами теории последних описывается класс операторов, коммутирующих с оператором Данкла. Устанавливается гиперцикличность и хаотичность операторов этого класса.

***Ключевые слова**: обобщенная производная Гельфонда-Леонтьева; производная Данкла; коммутация операторов; операторы комплексной свертки; гиперциклические и хаотические операторы.*

Пусть $H(G)$ - пространство голоморфных в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$ функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. В работе [1] развит гармонический анализ для оператора Данкла на пространстве $H(\mathbb{C})$ и установлена гиперцикличность и хаотичность линейных непрерывных в $H(\mathbb{C})$ операторов, которые коммутируют с оператором Данкла. В настоящей работе мы рассматриваем оператор Данкла как частный случай оператора обобщенного дифференцирования (ООД) Гельфонда-Леонтьева, что позволяет развить для него гармонический анализ на пространстве $H(G)$.

1. Под ООД понимается любой линейных непрерывный в $H(G)$ оператор D со свойством: $Dz^n = d_{n-1}z^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ D1 = 0$ [2]. Необходимо аналитическая в единичном круге $D(0,1)$ функция $d(z) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ называется *порождающей функцией* оператора D. Согласно [2] непрерывность D равно сильна аналитическому продолжению $d\left(\frac{z}{t}\right)$ как функции двух переменных из точки $(0,\infty)$ в каждую односвязную область $G_n \times (\bar{G}_{N(n)})' \subset \mathbb{C} \times \bar{\mathbb{C}}$, где $\{G_n\}$ - последовательность исчерпывающих G ограниченных областей:

$$\ldots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots,\ N(n) \geq n,\ \{N(n)\} \uparrow .$$

Дифференциально-разностный оператор Данкла определяется по правилу:

$$\left[\Lambda_{\alpha} f\right](z) := f'(z) + \frac{2\alpha+1}{2}\frac{f(z)-f(-z)}{z},\quad \alpha > -\frac{1}{2}.$$

Так как $\Lambda_\alpha z^n = nz^{n-1} + \frac{2\alpha+1}{2}(1-(-1)^n)z^{n-1}, \quad \Lambda_\alpha 1 = 0$, то

$$d(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1+\frac{2\alpha+1}{2}(1+(-1)^n)\right)z^n = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{2\alpha+1}{1-z^2}. \qquad (1)$$

Оператор Данкла естественнее назвать *дифференцированием (производной) Данкла*. Из определения следует, что односвязная область G необходимо должна быть центрально-симметричной. Она содержит начало координат. Действительно, соединим какие-либо две точки $z_0, -z_0 \in G$ ломаной $l \subset G$. В силу односвязности G ограниченные ломаной $l \cup (-l) \subset G$ компакты содержатся в ней. Нуль принадлежит одному из них.

$d(z)$ - рациональная функция с полюсами в точках $z = \pm 1$. Компакты $\overline{G}_n$ считаем центрально симметричными и содержащими 0. Так как $G_n \subset G_{N(n)}$, то $\forall (z,t) \in G_n \times (\overline{G}_{N(n)})' \;\; \frac{z}{t} \neq \pm 1$, поэтому Λ_α непрерывен и $H(G)$.

Докажем, что Λ_α имеет непрерывный линейный правый обратный оператор обобщенного интегрирования Гельфонда-Леонтьева, который естественно обозначить Λ_α^{-1}. Необходимо

$$\Lambda_\alpha^{-1} z^n = \frac{1}{d_n} z^{n+1} = \frac{1}{n+1+\frac{2\alpha+1}{2}(1+(-1)^n)} z^{n+1}, \; n = 0,1,\ldots.$$

Тогда порождающая функция оператора Λ_α^{-1} равна

$$d_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1+\frac{2\alpha+1}{2}(1+(-1)^n)} z^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+2}z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1+2\alpha+1}z^{2k} =$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_k}{(\alpha+2)_k}z^{2k} - \frac{\ln(1-z^2)}{2z} = \frac{1}{2(\alpha+1)}\,{}_2F_1(1,\alpha+1;\alpha+2;z^2) - \frac{\ln(1-z^2)}{2z},$$

где гипергеометрическая функция ${}_2F_1(1,\alpha+1;\alpha+2;z)$ имеет на своей римановой поверхности точки ветвления $0, 1, \infty$ [3]. Следовательно, $d_1\left(\frac{z}{t}\right)$ аналитически продолжается из $D_z(0,1) \times D_t(\infty,1)$ в каждую область $G_n \times (\overline{G}_{N(n)})'$, и поэтому Λ_α^{-1} расширяется до линейного непрерывного преобразования в $H(G)$.

Обобщенная экспонента дифференцирования Данкла Λ_α, определяемая из уравнения $[\Lambda_\alpha e](z) = e(z),\; e(0) = 0$, задается рядом

$e(z)=\sum_{n=0}\frac{1}{d_0\ldots d_{n-1}}z^n$. В [1] она названа ядром Данкла, и там же вычислены ее тейлоровские коэффициенты:

$$e(z)=\sum_{n=0}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^n\left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}z^n,$$

где $[\ ]$ - антье.

Покажем, что оператор дифференцирования Λ_α эквивалентен в пространстве $H(G)$ классическому оператору дифференцирования $\frac{d}{dz}$. Для этого нужно построить *оператор преобразования* Λ_α в $\frac{d}{dz}$, т.е. топологический изоморфизм в $H(G)$ со свойством $J\circ\Lambda_\alpha=\frac{d}{dz}\circ J$. Определим на пространстве степеней диагональный оператор

$$Jz^n:=\frac{2^n\left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}{\Gamma(\alpha+1)\,n!}z^n,\quad n=0,1,\ldots.$$

Его порождающая функция равна

$$d_J(z)=\sum_{n=0}\frac{2^n\left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}{\Gamma(\alpha+1)\,n!}z^n=\sum_{n=0}\frac{2^{2k}k!\,\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\,(2k)!}z^{2k}+$$

$$+\sum_{n=0}\frac{2^{2k+1}k!\,\Gamma(\alpha+1+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,(2k+1)!}z^{2k+1}=\sum_{n=0}\frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{1}{2}\right)_k}z^{2k}+$$

$$+2\sum_{n=0}\frac{\Gamma(\alpha+2+k)}{\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{3}{2}\right)_k}z^{2k+1}={}_2F_1\left(1,\alpha+1;\frac{1}{2};z^2\right)+2(\alpha+1)z\,{}_2F_1\left(1,\alpha+2;\frac{3}{2};z^2\right).$$

По тем же причинам, что и выше, J расширяется до непрерывного преобразования в $H(G)$.

Рассмотрим теперь диагональный оператор:

$$J^{-1}z^n:=\frac{\Gamma(\alpha+1)\,n!}{2^n\left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}z^n,\quad n=0,1,\ldots.$$

$$d_{J^{-1}}(z) = \sum_{n=0} \frac{\Gamma(\alpha+1)\, n!}{2^n \left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)} z^n = \sum_{n=0} \frac{\Gamma(\alpha+1)\,(2k)!}{2^{2k} k!\,\Gamma(\alpha+1+k)} z^{2k} +$$

$$+ \sum_{n=0} \frac{\Gamma(\alpha+1)(2k+1)!}{2^{2k+1} k!\,\Gamma(\alpha+2+k)} z^{2k+1} = \sum_{n=0} \frac{\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{1}{2}\right)_k}{\Gamma(\alpha+1+k)} z^{2k} + \sum_{n=0} \frac{\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{3}{2}\right)_k}{\Gamma(\alpha+2+k)} z^{2k+1} =$$

$$= {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \alpha+1; z^2\right) + \frac{1}{2(\alpha+1)} z\; {}_2F_1\left(1, \frac{3}{2}; \alpha+2; z^2\right),$$

то есть J^{-1} также расширяется до линейного непрерывного преобразования в $H(G)$.

Так как для $n = 0,1,...$

$$J^{-1} \circ \frac{d}{dz} \circ J z^n := \frac{2^n \left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma(\alpha+1+k)}{(k-1)!\,\Gamma(\alpha+1+)} J^{-1} n\, z^{n-1} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \dfrac{2^n \left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}{\Gamma(\alpha+1)\, n!} \cdot \dfrac{\Gamma(\alpha+1)(n-1)!}{2^{n-1}\left[\frac{n-1}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n}{2}\right]\right)} z^{n-1}, & n \in \mathbb{N} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2k\, z^{2k-1}, & k \in \mathbb{N} \\ 2(\alpha+1+k) z^{2k}, & k = 0,1,... \end{cases} \qquad \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \left(n + \dfrac{2\alpha+1}{2}(1-(-1)^n)\right) z^{n-1} k \in \mathbb{N}, & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

то $\Lambda_\alpha = J^{-1} \circ \frac{d}{dz} \circ J$ на $H(G)$. Таким образом, Λ_α эквивалентен $\frac{d}{dz}$ в $H(G)$.

Замечание. Сопряженный с диагональным оператором J оператор J' непрерывен в $H_0(G') := \left\{ F(t) = \sum_{n=0} \frac{f_n}{t^{n+1}} : F(t) \in H(G'),\ F(\infty) = 0 \right\}$ и действует по правилу $[J'F](t) = \sum_{n=0} \frac{2^n \left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}{\Gamma(\alpha+1)\, n!} \frac{f_n}{t^{n+1}}$. Это следует из определения сопряженного оператора.

2. Опишем класс линейных непрерывных в $H(G)$ операторов, коммутирующих с дифференцированием Данкла. Из равенства $\Lambda_\alpha = J^{-1}\circ\frac{d}{dz}\circ J$ получаем:

$$L\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha L \qquad LJ^{-1}\frac{d}{dz}J = J^{-1}\frac{d}{dz}JL \qquad \left(JLJ^{-1}\right)\frac{d}{dz} = \frac{d}{dz}\left(JLJ^{-1}\right).$$

Таким образом, задача сводится к описанию линейных непрерывных в $H(G)$ операторов, коммутирующих с классическим дифференцированием.

Теорема 1. Равносильны утверждения:

1) отображение, определенное на последовательности степеней $\{z^n\}$ по правилу $[Lt^n](z) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^{n-k}$, расширяется до линейного непрерывного преобразования в $H(G)$;

2) символ линейного непрерывного в $H(G)$ оператора L $\frac{\left[Le^{\lambda t}\right](z)}{e^{z\lambda}}$ является независящей от z целой функцией экспоненциального типа $a(z) := \sum_{n=0} \frac{a_n}{n!}\lambda^n$, и $\forall n$ □ □$N(n) > n$ функция двух переменных $z \ D(z_0,\varepsilon) \ G_n$, $z \ D(z_0,\varepsilon) \ G_n$ $A(t-z) := \sum_{n=0}\frac{a_n}{(t-z)^n}$ аналитически продолжается в односвязную область $\bar{G}'_{N(n)} \ G_n$ □ □. Тем самым L представляется в виде *оператора комплексной свертки:*

$$[Ly](z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma G_{N(n)+1}} y(t)A(t-z)dt;$$

3) линейный непрерывный оператор L в $H(G)$ коммутирует с $\frac{d}{dz}$ на последовательности степеней $\{z^n\}$.

Доказательство. 2) 1). $[Lt^n](z) :=$

$$:= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} t^n \sum_{k=0}\frac{a_k}{(t-z)^{k+1}}dt = \sum_{k=0} a_k\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{t^n}{(t-z)^{k+1}}dt = \sum_{k=0}^{n} a_k\frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}z^{n-k}.$$

1) 3). Действительно,

$$(Lz^n)' := \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_n^k a_k z^{n-k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a_k z^{n-k-1} =: nLz^{n-1} = L(z^n)'.$$

3) $\Rightarrow$ 2). Заметим, что из полноты системы степеней $\{z^n\}$ в $H(G)$ и непрерывности L следует коммутация $L\frac{d}{dz}=\frac{d}{dz}L$ на всем $H(G)$. Так как $(Lt^n)^{(n+1)}=0$, то $[Lt^n](z)$ есть многочлен степени n. Обозначая $a_n:=[Lt^n](0)$, имеем:

$$[Lt^n](z)(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}[Lt^n](z)^{(k)}(0)z^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}[Lt^{n-k}](z)(0)z^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k z^{n-k}.$$

Так как оператор сдвига $S:H(G)\to H(G-z_0),\ z_0\in G,\ [Sf(t)](z):=f(z+z_0)$ и обратный к нему коммутируют с $\frac{d}{dz}$, то без потери общности можно предполагать $0\in G$.

Согласно [4] имеем такое интегральное представление:

$$[Ly](z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\subset G_{N(n)+1}}y(t)k(t,z)dt,$$

где ядро $k(t,z)$ есть голоморфная функция двух переменных на каждой односвязной области $\bar{G}'_{N(n)}\times G_n$. Функция двух переменных $[Le^{\lambda t}](z)$ является аналитической по $\lambda\in\mathbb{C}$ (по теореме о производной интеграла по параметру) и по $z\in G_n$. При этом она является целой функцией экспоненциального типа по λ как обратное преобразование Бореля по t от ядра $k(t,z)$. Ее разложение в ряд Тейлора в окрестности точки (0, 0)

$$[Le^{\lambda t}](z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}[Le^{\lambda t}]}{\partial\lambda^m\partial z^n}(0,0)\lambda^m z^n=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[Lt^m](0)}{m!n!}\lambda^m(\lambda z)^n=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{m!}\lambda^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda z)^n=:a(\lambda)e^{\lambda z}.$$

Отсюда и из сделанного выше замечания следует, что $a(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа.

Применим к полученной функции прямое преобразование Бореля:

$$k(t,z)=\int_0^{\infty}e^{-t\lambda}a(\lambda)e^{\lambda z}d\lambda=\int_0^{\infty}e^{-(t-z)\lambda}a(\lambda)d\lambda=:A(t-z),$$

где $A(t)$ - преобразование Бореля функции $a(\lambda)$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема, в частности, решает задачу представления класса линейных непрерывных операторов в $H(G)$, коммутирующих с оператором дифференцирования, поставленную в ([5] с.137). Причина столь долгого ее «решания» состоит в том, что ядро оператора комплексной свертки

$A(t)$ оказывается, вообще говоря, неоднозначной аналитической функцией при ее продолжении в области $\bar{G}'_{N(n)} - G_n$. Об этом свидетельствует нижеприведенный пример.

Пример. Положим $G := \bigcup_{n=0} D(n; 1{,}5)$. Это неограниченная односвязная область, и ее «сумматор» $S(G) := \{z \quad G : G + z \quad G\} = \{0, 1, ...\}$. Положим $A(t) := \ln\left(1 - \frac{1}{t}\right)$, $A(\ \ ) := 0$ в $[0,1]$. Точки $0, 1$ являются для $A(t)$ точками ветвления, и потому она не продолжается до однозначной аналитической функции в проколотую окрестность, например, точки 0. С другой стороны, $\forall G_n \quad G$ и $N(n) := n + 1$ функция $A(t - z) := \ln\left(1 - \frac{1}{t - z}\right)$ аналитически продолжается из $D_t(\ \ , R) \quad D_z(0, \varepsilon)$ в каждую область $\bar{G}'_{n+1} - G_n$. Поэтому оператор комплексной свертки

$$[Ly](z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma G_{n+1}} y(t) \ln\left(1 - \frac{1}{t - z}\right) dt$$

непрерывен в $H(G)$. На подпространстве целых функций он представим в виде дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами $[Ly](z) = \sum_{n=0} \frac{-1}{(k+1)!} y^{(k)}(z)$.

В доказательстве аналогичной теоремы для производной Данкла нам понадобится

Лемма. Обобщенная экспонента $e(z) = \sum_{n=0} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^n \left[\frac{n}{2}\right]! \Gamma\left(\alpha + 1 + \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)} z^n$ дифференцирования Данкла Λ_α имеет такое интегральное представление

$$e(z) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha + 1/2)} \int_0^1 (1 - x^2)^{\alpha - 1/2} \left((1 + x)e^{xz} + (1 - x)e^{-xz}\right) dx,$$

и является целой функцией экспоненциального типа с сопряженной диаграммой $[-1, 1]$ [6].

Доказательство. Ее преобразование Бореля

$$E(t) = \sum_{n=0} \frac{\Gamma(\alpha + 1) n!}{2^n \left[\frac{n}{2}\right]! \Gamma\left(\alpha + 1 + \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)} \frac{1}{t^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{t}\,{}_2F_1\left(1,\frac{1}{2},\alpha+1,\frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{2(\alpha+1)t^2}\,{}_2F_1\left(1,\frac{3}{2},\alpha+2,\frac{1}{t^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{t}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}\int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{1-\frac{u}{t^2}}du + \frac{1}{2(\alpha+1)t^2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(\alpha+1/2)}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{1-\frac{u}{t^2}}du =$$

$$= \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}\left(t\int_0^1 \frac{(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{t^2-x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{t^2-x^2}dx\right) =: C_0\int_0^1 \frac{(t+x^2)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{t^2-x^2}dx$$

по свойству гипергеометрической функции аналитично вне $[-1,1]$. Откуда $e(z)$ есть целая функция экспоненциального типа с сопряженной диаграммой в отрезке $[-1,1]$.

$$e(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{zt}E(t)dt = C_0\int_0^1 (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{zt}\frac{t+x^2}{t^2-x^2}dt\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}C_0\int_0^1 (1+x)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{xz}dx + \frac{1}{2}C_0\int_0^1 (1-x)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+x)^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-xz}dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}\int_0^1 (1-x^2)^{\alpha-1/2}\left((1+x)e^{xz}+(1-x)e^{-xz}\right)dx.$$

Остается оценить рост последнего интеграла снизу на лучах $\arg z = 0,\pi$.

Лемма доказана.

Назовем, следуя [7], обобщенным преобразованием Бореля, порожденным обобщенной экспонентой $e(z)$, правило, сопоставляющее функции экспоненциального типа $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{n!}z^n$ аналитическую в окрестности бесконечности функцию $[B_e f](t) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}{\Gamma(\alpha+1)\,n!}\frac{f_n}{t^{n+1}} \equiv [(J'\circ B)f](t),$

где $[Bf](t) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{t^{n+1}}$ - классическое преобразование Бореля. Обратное обобщенное преобразование Бореля [8], порожденное обобщенной экспонентой $e(z)$, сопоставляет аналитической в окрестности бесконечности функции $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{t^{n+1}}$ целую функцию экспоненциального типа

$$\left(B_e^{-1}F\right)(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^n\left[\frac{n}{2}\right]!\,\Gamma\left(\alpha+1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}f_n z^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C e(zt)F(t)dt.$$

Теорема 2. Равносильны утверждения:

1) отображение, действующее на последовательности степеней $\{z^n\}$ по правилу

$$L\left(\frac{n!\,\Gamma(\alpha+1)}{2^n\left(\frac{n}{2}\right)!\,\Gamma^{+}\left(\alpha+1+\frac{n\;\;1}{2}\right)}t^n\right)(z):=$$

$$:=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k \frac{(n-k)!\,\Gamma(\alpha+1)}{2^{n-k}\left(\frac{n-k}{2}\right)!\,\Gamma\left(\alpha+1+\frac{n-k+1}{2}\right)} z^{n-k},$$

расширяется до линейного непрерывного преобразования в $H(G)$;

2) для линейного непрерывного в $H(G)$ оператора L: $[Le(\lambda t)](z) \quad a(\lambda)e(\lambda z)$, $a(\lambda):=\sum_{n=0} \frac{a_n}{n!}\lambda^n$ - есть целая функция экспоненциального типа, и $\forall n \quad \exists N(n) > n$ функция двух переменных $z \quad D(z_0,\varepsilon) \quad G_n,\ t \quad D(\ ,R) \quad \bar{G}'_{N(n)} \qquad A(t-z):=\sum_{n=0}\frac{a_n}{(t-z)^n}$ аналитически продолжается в односвязную область $\bar{G}'_{N(n)} \quad G_n$. Такой оператор L представим в виде обобщенной комплексной свертки

$$[Ly](z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\, G_{N(n)+1}} y(t)\left[B_e a(\lambda)e(\lambda z)\right](t,z)dt;$$

3) линейный непрерывный оператор L в $H(G)$ коммутирует с Λ_α на последовательности степеней $\{z^n\}$.

Доказательство. 2) $\quad$ 1).

$$L\left(\frac{n!\,\Gamma(\alpha+1)}{2^n\left(\frac{n}{2}\right)!\,\Gamma^{+}\left(\alpha+1+\frac{n\;\;1}{2}\right)}t^n\right)(z):=$$

$$:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R}\frac{n!\,\Gamma(\alpha+1)}{2^n\left(\frac{n}{2}\right)!\,\Gamma^{+}\left(\alpha+1+\frac{n\;\;1}{2}\right)}t^n\left[B_e a(\lambda)e(\lambda z)\right](t)dt=$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} e(t\zeta)\left[B_e a(\lambda)e(\lambda z)\right](t)dt\right)^{(n)}_{\zeta=0}=$$

$$=\left[a(\zeta)e(\zeta z)\right]^{(n)}_{\zeta=0}=\sum_{k=0} C_n^k a^{(k)}(0)z^{n-k}e^{(n-k)}(0)=$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(n-k)!\,\Gamma(\alpha+1)}{2^{n-k}\left(\frac{n-k}{2}\right)!\,\Gamma\left(\alpha+1+\frac{n-k+1}{2}\right)} a_k z^{n-k}.$$

1) 3) доказывается по той же схеме, что и в теореме 1.

3) 2). Воспользуемся теоремой Гурвица о сложении особенностей [9]. При фиксированном $z_0 \quad G_n$ функция экспоненциального типа $e(z_0\lambda)$ согласно лемме имеет сопряженную диаграмму $[-z_0, z_0]$. По условию функция $A(t)$ аналитически продолжается в область $\bar{G}'_{N(n)} - G_n$, дополнение которой является звездным множеством. Тогда по теореме Гурвица функция $\left[Ba(\lambda)e(\lambda z_0)\right](t)$ аналитически продолжается в область

$$\left(\left(\bar{G}'_{N(n)} - G_n\right)' + [-z_0, z_0]\right)' = \bigcap_{z \quad G_n} \left(\bar{G}_{N(n)} - z\right) + [-z_0, z_0] =$$

$$= \left(\left\{z : z + G_n \quad \bar{G}_{N(n)}\right\} + [-z_0, z_0]\right) \quad \bar{G}_{N(n)}.$$

В силу сделанного выше замечания об операторе J' туда же будет продолжаться и функция $\left[B_e a(\lambda)e(\lambda z_0)\right](t) = \left[(J' \circ B)\, a(\lambda)e(\lambda z_0)\right](t)$. Поэтому она удовлетворяет условию на ядро линейного непрерывного оператора в $H(G)$. Так как $B_e^{-1}k(t,z) \quad (z) = \left[Le(\lambda t)\right](z) \quad a(\lambda)e(\lambda z)$, то

$$k(t,z) \quad \left[B_e a(\lambda)e(\lambda z)\right](t).$$

Теорема доказана.

Замечание. Обобщенное преобразование Бореля (называемое $B_{\rho,1}$-преобразованием), порожденное функцией Миттаг-Леффлера $e(z) = E_\rho(z)$, было введено в [10]. Для него аналогичный по форме оператор обобщенной комплексной свертки ранее рассматривался в [11].

3. Напомним ряд понятий динамической теории [12], [13]. Пусть L есть линейное непрерывное преобразование локально выпуклого пространства E. *Орбитой элемента* $x \quad E$ называется последовательность $Orb(L,x) :=$ $:= \{x, Lx, L^2x, \ldots\}$. Элемент x называется *циклическим* (*гиперциклическим*) для L, если $Orb(L,x)$ полна (плотна) в E. Преобразование L называется *циклическим* (*гиперциклическим*), если оно имеет циклический (гиперциклический) элемент. Элемент $x \quad E$ называется *периодическим* для преобразования L, если $\exists n \quad L^n x = x$. Преобразование L называется *хаотическим*, если оно имеет плотное в E множество периодических элементов.

Теорема 3. Пусть L есть линейное непрерывное не скалярно кратное тождественному преобразование пространства $H(G)$, где G есть звездная центрально-симметричная область в □ , и $L\Lambda_{\alpha} = \Lambda_{\alpha} L$ на $H(G)$. Тогда L имеет инвариантное относительно Λ_{α} гиперциклическое многообразие, которое плотно в $H(G)$. L является также хаотическим.

Доказательство. В силу эквивалентности операций дифференцирования Λ_{α} и $\frac{d}{dz}$ достаточно доказать эту теорему для последнего.

Схема доказательства совпадает с таковой для преобразований в $H(□^{n})$ [12] и также опирается на следующую версию для пространства Фреше следствия 1.5 этой статьи:

«Пусть для линейного непрерывного преобразования L пространства Фреше E последовательность $\{L^{n}\}$ поточечно сходится к нулю на некотором плотном в E подмножестве V. Если существуют плотное подмножество $W \quad E$ и отображение $S: W \to W$ такие, что TS тождественно на W и $\{S^{n}\}$ поточечно сходится к нулю на W, то преобразование L гиперциклическое на пространстве E».

В силу условия характеристическая функция $a(\lambda)$ непостоянна, и потому множества $A := \{z : |a(z)| < 1\}, B := \{z : |a(z)| > 1\}$ открыты в □ . Поэтому подпространства $V := span\{e^{\lambda z} : \lambda \quad A\}, \quad W := span\{e^{\lambda z} : \lambda \quad B\}$ плотны в $H(G)$. Отображение $S(e^{\lambda z}) := \frac{1}{a(\lambda)} e^{\lambda z}$ продолжается по линейности на все W. Напомним, что $[Le^{\lambda t}](z) = a(\lambda) e^{\lambda z}$. Каждая гиперциклическая функция f преобразования L порождает плотное в $H(G)$ гиперциклическое многообразие $\{[p(L)](f) : p \text{ многочлен}\}$.

Докажем хаотичность. Будем искать периодические для L функции вида $e^{\lambda z}$. Имеем импликацию:

$$[L^{n} e^{\lambda t}](z) - e^{\lambda z} = (a^{n}(\lambda) - 1) e^{\lambda z} = 0 \qquad a(\lambda) = \exp\left(\frac{2\pi k}{n} i\right), \quad n \; □ \; k = 0,..,n-1.$$

Так как множество $\Lambda := \{\lambda : \exists n \; □ , k \quad n-1 \quad a(\lambda) = \exp\left(\frac{2\pi k}{n} i\right)\}$ имеет предельную конечную точку, то по теореме единственности подпространство периодических функций $span\{e^{\lambda z} : \lambda \; \Lambda\}$ плотно в $H(G)$. То есть преобразование L хаотическое.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. J.J. Betancor, M. Sifi, K. Trimeche Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operator on // Acta Math. Hungar., 106(1-2) (2005), 101-116.

2. Братищев А.В. Об одном диагональном операторе / А.В. Братищев, А.В. Моржаков // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения: сб.статей. – Вып.8. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ. – 2008. – С. 32-37.

3. Бейтман Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука. – 1973. Bateman H., Erdeeyi A. Higher transcendental functions. V. 1. N.-Y.: MC Graw-Hill Book Company. – 1953. – С.1-296.

4. Köthe G. Dualitat in der Funktionentheorie. // J. reine angew. math., Bd. 191 1953). – S. 30-49.

5. Коробейник Ю.Ф. Операторы сдвига на числовых семействах / Ю.Ф. Коробейник. – Ростов н/Д: ИРУ, 1983. – С. 1-160.

6. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин. – М.: ГИТТЛ, 1956. – С. 1-632.

7. Братищев А.В. Описание обобщенного преобразования Бореля, сохраняющего теорему Пойа / А.В. Братищев// Вестник ДГТУ. – 2001. – Т.1. – № 1. – С. 85-88.

8. Евграфов М.А. Обобщенное преобразование Бореля / М.А. Евграфов// Препринт №35. – М.: ИПМ АН СССР, 1976. – 57 с.

9. Бибербах Л. Аналитическое продолжение / Л. Бибербах. – М.: Наука, 1967. – С. 1-240.

10. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

11. Епифанов О.В. Однородное уравнение типа свертки в пространстве аналитических функций/ О.В. Епифанов // Известия АН СССР. Сер. Матем. – Т. 49. – №4. – С. 766-783.

12. G. Godefroy, G.H. Shapiro Operators with dense , invariant cyclic vector manifolds, J. Funct. Analysis, 98 (1991), 229-269.

13. R.L. Devaney "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

Материал поступил в редакцию 04.03.09.

A.V. BRATISHCHEV

CHAOTIC COMMUTATING WITH THE DUNKL DIFFERENTIATION LINEAR OPERATORS ON THE SPACE OF ANALYTIC FUNCTIONS

We give representation of linea continuous operator, commutating with Dankle differentiation. These operators turn out to be chaotic and hypercyclic.

БРАТИЩЕВ Александр Васильевич (р.1949), профессор кафедры математики ДГТУ, доктор физико-математических наук (1998), профессор (2001). Окончил механико-математический факультет Ростовского-на-Дону государственного университета (1971).

Научные интересы: теория функций, функциональный анализ в локально выпуклых пространствах, теория управления.

Автор 90 научных работ в отечественной и зарубежной печати.

avbratishchev@dstu.edu.ru